BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2013
Môn: TOÁN; Khối A và khối A1
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 *điểm*)

Câu 1 (2,0 *điểm*). Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1 \quad (1)$, với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 0$.

b) Tìm m để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 2 (1,0 *điểm*). Giải phương trình $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Câu 3 (1,0 *điểm*). Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

Câu 4 (1,0 *điểm*). Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2}\ln x\,\mathrm{d}x$.

Câu 5 (1,0 *điểm*). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

Câu 6 (1,0 *điểm*). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c) = 4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{32a^3}{(b+3c)^3} + \dfrac{32b^3}{(a+3c)^3} - \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 *điểm*): *Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc phần B)*

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1,0 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm C thuộc đường thẳng $d\colon 2x + y + 5 = 0$ và $A(-4; 8)$. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C, N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD. Tìm tọa độ các điểm B và C, biết rằng $N(5; -4)$.

Câu 8.a (1,0 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-6}{-3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$ và điểm $A(1; 7; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với Δ. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho $AM = 2\sqrt{30}$.

Câu 9.a (1,0 *điểm*). Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta : x - y = 0$. Đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Viết phương trình đường tròn (C).

Câu 8.b (1,0 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x + 3y + z - 11 = 0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 8 = 0$. Chứng minh (P) tiếp xúc với (S). Tìm tọa độ tiếp điểm của (P) và (S).

Câu 9.b (1,0 *điểm*). Cho số phức $z = 1 + \sqrt{3}\,i$. Viết dạng lượng giác của z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = (1+i)z^5$.

———**Hết**———

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.......................................; Số báo danh:......................

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

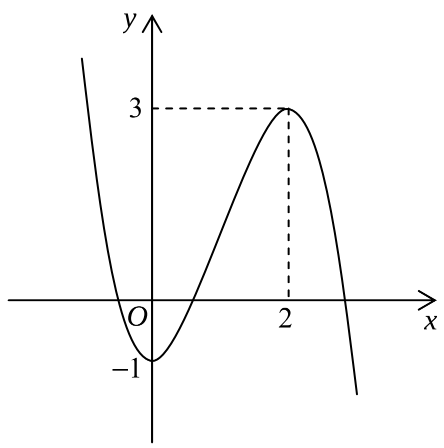
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM
ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2013
Môn: TOÁN; Khối A và khối A1
(Đáp án - thang điểm gồm 04 trang)

Câu	***Đáp án***	***Điểm***
1 **(2,0 *điểm*)**	a. **(1,0 *điểm*)**	
	Khi $m = 0$ ta có $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. • Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. • Sự biến thiên: - Chiều biến thiên: $y' = -3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.	**0,25**
	Khoảng đồng biến: $(0;\ 2)$; các khoảng nghịch biến: $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$. - Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = -1$; đạt cực đại tại $x = 2$, $y_{CĐ} = 3$. - Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$.	**0,25**
	- Bảng biến thiên:	**0,25**

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

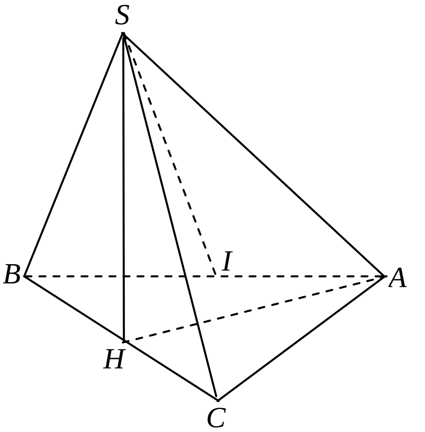
• Đồ thị: **0,25**

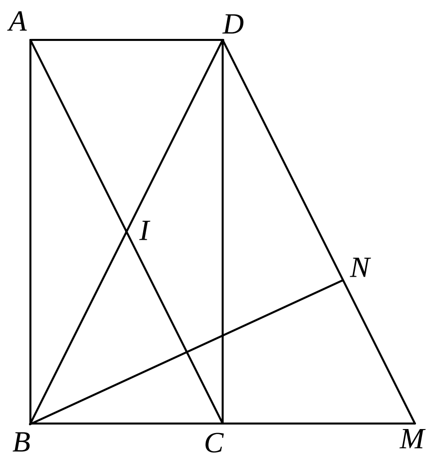


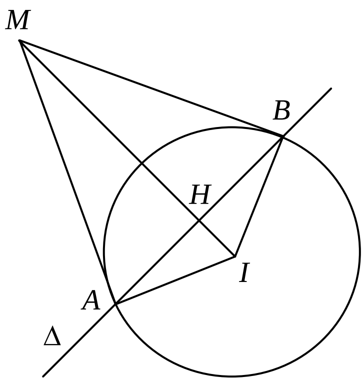
	b. **(1,0 *điểm*)**	
	Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3m$. Hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \le 0, \forall x > 0$	**0,25**
	$\Leftrightarrow m \le x^2 - 2x, \forall x > 0$. Xét $f(x) = x^2 - 2x$ với $x > 0$. Ta có $f'(x) = 2x - 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.	**0,25**
	Bảng biến thiên:	**0,25**

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

	Dựa vào bảng biến thiên ta được giá trị m thỏa mãn yêu cầu của bài toán là $m \le -1$.	**0,25**

Câu	Đáp án	Điểm
2 **(1,0 điểm)**	Điều kiện: $\cos x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với $1+\dfrac{\sin x}{\cos x}=2(\sin x+\cos x)$	**0,25**
	$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(2\cos x-1)=0.$	**0,25**
	• $\sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$	**0,25**
	• $2\cos x-1=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$ Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm: $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$	**0,25**
3 **(1,0 điểm)**	$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y \quad (1)\\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0 \quad (2)\end{cases}$ Điều kiện: $x\geq 1.$ Từ (2) ta được $4y=(x+y-1)^2,$ suy ra $y\geq 0.$	**0,25**
	Đặt $u=\sqrt[4]{x-1},$ suy ra $u\geq 0.$ Phương trình (1) trở thành: $\sqrt{u^4+2}+u=\sqrt{y^4+2}+y$ (3). Xét $f(t)=\sqrt{t^4+2}+t,$ với $t\geq 0.$ Ta có $f'(t)=\dfrac{2t^3}{\sqrt{t^4+2}}+1>0, \forall t\geq 0.$ Do đó phương trình (3) tương đương với $y=u,$ nghĩa là $x=y^4+1.$	**0,25**
	Thay vào phương trình (2) ta được $y(y^7+2y^4+y-4)=0$ (4). Hàm $g(y)=y^7+2y^4+y-4$ có $g'(y)=7y^6+8y^3+1>0$ với mọi $y\geq 0.$	**0,25**
	Mà $g(1)=0,$ nên (4) có hai nghiệm không âm là $y=0$ và $y=1.$ Với $y=0$ ta được nghiệm $(x;y)=(1;0);$ với $y=1$ ta được nghiệm $(x;y)=(2;1).$ Vậy nghiệm $(x;y)$ của hệ đã cho là $(1;0)$ và $(2;1).$	**0,25**
4 **(1,0 điểm)**	Đặt $u=\ln x,\ \mathrm{d}v=\dfrac{x^2-1}{x^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x},\ v=x+\dfrac{1}{x}.$	**0,25**
	Ta có $I=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x\bigg\vert_1^2-\displaystyle\int_1^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$	**0,25**
	$=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x\bigg\vert_1^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\bigg\vert_1^2$	**0,25**
	$=\dfrac{5}{2}\ln 2-\dfrac{3}{2}.$	**0,25**
5 **(1,0 điểm)**	 Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH\perp BC$. Mà (SBC) vuông góc với (ABC) theo giao tuyến BC, nên $SH\perp(ABC)$.	**0,25**
	Ta có $BC=a$, suy ra $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\ AC=BC\sin 30^{\circ}=\dfrac{a}{2};$ $AB=BC\cos 30^{\circ}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$ Do đó $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{6}SH.AB.AC=\dfrac{a^3}{16}.$	**0,25**
	Tam giác ABC vuông tại A và H là trung điểm của BC nên $HA=HB$. Mà $SH\perp(ABC)$, suy ra $SA=SB=a$. Gọi I là trung điểm của AB, suy ra $SI\perp AB$.	**0,25**
	Do đó $SI=\sqrt{SB^2-\dfrac{AB^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{13}}{4}.$ Suy ra $d(C,(SAB))=\dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAB}}=\dfrac{6V_{S.ABC}}{SI.AB}=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}.$	**0,25**

Câu	Đáp án	Điểm
6 **(1,0 *điểm*)**	Đặt $x=\frac{a}{c},\ y=\frac{b}{c}$. Ta được $x>0,\ y>0$. Điều kiện của bài toán trở thành $xy+x+y=3$. Khi đó $P=\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+y^2}$. Với mọi $u>0,\ v>0$ ta có $u^3+v^3=(u+v)^3-3uv(u+v)\geq(u+v)^3-\frac{3}{4}(u+v)^3=\frac{(u+v)^3}{4}$. Do đó $\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}\geq 8\left(\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}\right)^3=8\left(\frac{(x+y)^2-2xy+3x+3y}{xy+3x+3y+9}\right)^3$.	**0,25**
	Thay $xy=3-x-y$ vào biểu thức trên ta được $\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}\geq 8\left(\frac{(x+y-1)(x+y+6)}{2(x+y+6)}\right)^3=(x+y-1)^3$. Do đó $P\geq(x+y-1)^3-\sqrt{x^2+y^2}=(x+y-1)^3-\sqrt{(x+y)^2-2xy}=(x+y-1)^3-\sqrt{(x+y)^2+2(x+y)-6}$.	**0,25**
	Đặt $t=x+y$. Suy ra $t>0$ và $P\geq(t-1)^3-\sqrt{t^2+2t-6}$. Ta có $3=x+y+xy\leq(x+y)+\frac{(x+y)^2}{4}=t+\frac{t^2}{4}$ nên $(t-2)(t+6)\geq 0$. Do đó $t\geq 2$. Xét $f(t)=(t-1)^3-\sqrt{t^2+2t-6}$, với $t\geq 2$. Ta có $f'(t)=3(t-1)^2-\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}}$. Với mọi $t\geq 2$ ta có $3(t-1)^2\geq 3$ và $\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}}=\sqrt{1+\frac{7}{(t+1)^2-7}}\leq\sqrt{1+\frac{7}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, nên $f'(t)\geq 3-\frac{3\sqrt{2}}{2}>0$. Suy ra $f(t)\geq f(2)=1-\sqrt{2}$. Do đó $P\geq 1-\sqrt{2}$.	**0,25**
	Khi $a=b=c$ thì $P=1-\sqrt{2}$. Do đó giá trị nhỏ nhất của P là $1-\sqrt{2}$.	**0,25**
7.a **(1,0 *điểm*)**	 Do $C\in d$ nên $C(t;-2t-5)$. Gọi I là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, suy ra I là trung điểm của AC. Do đó $I\left(\frac{t-4}{2};\frac{-2t+3}{2}\right)$.	**0,25**
	Tam giác BDN vuông tại N nên $IN = IB$. Suy ra $IN = IA$. Do đó ta có phương trình $\left(5-\frac{t-4}{2}\right)^2+\left(-4-\frac{-2t+3}{2}\right)^2=\left(-4-\frac{t-4}{2}\right)^2+\left(8-\frac{-2t+3}{2}\right)^2$ $\Leftrightarrow t=1$. Suy ra $C(1;-7)$.	**0,25**
	Do M đối xứng với B qua C nên $CM = CB$. Mà $CB = AD$ và $CM\|\|AD$ nên tứ giác $ACMD$ là hình bình hành. Suy ra $AC\|\|DM$. Theo giả thiết, $BN\perp DM$, suy ra $BN\perp AC$ và $CB = CN$. Vậy B là điểm đối xứng của N qua AC.	**0,25**
	Đường thẳng AC có phương trình: $3x+y+4=0$. Đường thẳng BN qua N và vuông góc với AC nên có phương trình $x-3y-17=0$. Do đó $B(3a+17;\ a)$. Trung điểm của BN thuộc AC nên $3\left(\frac{3a+17+5}{2}\right)+\frac{a-4}{2}+4=0\Leftrightarrow a=-7$. Vậy $B(-4;-7)$.	**0,25**
8.a **(1,0 *điểm*)**	Δ có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(-3;-2;1)$.	**0,25**
	(P) qua A và nhận $\vec{u}$ làm véctơ pháp tuyến, nên (P) có phương trình $-3(x-1)-2(y-7)+(z-3)=0\Leftrightarrow 3x+2y-z-14=0$.	**0,25**
	M thuộc Δ nên $M(6-3t;-1-2t;-2+t)$.	**0,25**
	$AM=2\sqrt{30}\Leftrightarrow(6-3t-1)^2+(-1-2t-7)^2+(-2+t-3)^2=120\Leftrightarrow 7t^2-4t-3=0$ $\Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=-\frac{3}{7}$. Suy ra $M(3;-3;-1)$ hoặc $M\left(\frac{51}{7};-\frac{1}{7};-\frac{17}{7}\right)$.	**0,25**

Câu	Đáp án	Điểm
9.a (1,0 *điểm*)	Số phần tử của S là A_7^3	**0,25**
	$=210.$	**0,25**
	Số cách chọn một số chẵn từ S là $3.6.5=90$ (cách).	**0,25**
	Xác suất cần tính bằng $\dfrac{90}{210}=\dfrac{3}{7}.$	**0,25**
7.b (1,0 *điểm*)	 Gọi M là giao điểm của tiếp tuyến tại A và B của (C), H là giao điểm của AB và IM. Khi đó $M(0;t)$, với $t\ge 0;$ H là trung điểm của AB. Suy ra $AH=\dfrac{AB}{2}=2\sqrt{2}.$	**0,25**
	$\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AI^2},$ suy ra $AM=2\sqrt{10}.$ Do đó $MH=\sqrt{AM^2-AH^2}=4\sqrt{2}.$ Mà $MH=d(M,\Delta)=\dfrac{\lvert t\rvert}{\sqrt{2}},$ nên $t=8.$ Do đó $M(0;8).$	**0,25**
	Đường thẳng IM qua M và vuông góc với Δ nên có phương trình $x+y-8=0.$ Do đó tọa độ điểm H thỏa mãn hệ $\begin{cases}x-y=0\\ x+y-8=0\end{cases}\Rightarrow H(4;4).$	**0,25**
	Ta có $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{2}=\dfrac{1}{4}HM,$ nên $\overrightarrow{IH}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{HM}.$ Do đó $I(5;3).$ Vậy đường tròn (C) có phương trình $(x-5)^2+(y-3)^2=10.$	**0,25**
8.b (1,0 *điểm*)	(S) có tâm $I(1;-2;1)$ và bán kính $R=\sqrt{14}.$	**0,25**
	$d(I,(P))=\dfrac{\lvert 2.1+3(-2)+1.1-11\rvert}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\dfrac{14}{\sqrt{14}}=R.$ Do đó (P) tiếp xúc với (S).	**0,25**
	Gọi M là tiếp điểm của (P) và (S). Suy ra M thuộc đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Do đó $M(1+2t;-2+3t;1+t).$	**0,25**
	Do M thuộc (P) nên $2(1+2t)+3(-2+3t)+(1+t)-11=0\Leftrightarrow t=1.$ Vậy $M(3;1;2).$	**0,25**
9.b (1,0 *điểm*)	$z=1+\sqrt{3}i=2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$	**0,25**
	$=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right).$	**0,25**
	Suy ra $z^5=2^5\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)=16(1-\sqrt{3}i).$	**0,25**
	Do đó $w=16(\sqrt{3}+1)+16(1-\sqrt{3})i.$ Vậy w có phần thực là $16(\sqrt{3}+1)$ và phần ảo là $16(1-\sqrt{3}).$	**0,25**

------------- **Hết** -------------