BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA NĂM 2016**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu I (*1,0 điểm*)

1. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = 2z + \overline{z}$.
2. Cho $\log_2 x = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x$.

Câu II (*1,0 điểm*). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu III (*1,0 điểm*). Tìm m để hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị đó, tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

Câu IV (*1,0 điểm*). Tính tích phân $I = \int_0^3 3x\left(x + \sqrt{x^2 + 16}\right)\mathrm{d}x$.

Câu V (*1,0 điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;-2)$, $B(1;0;1)$ và $C(2;-1;3)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC.

Câu VI (*1,0 điểm*)

1. Giải phương trình $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0$.
2. Học sinh A thiết kế bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học của lớp mình. Bảng gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn liên tiếp 3 nút khác nhau sao cho 3 số trên 3 nút đó theo thứ tự đã nhấn tạo thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Học sinh B không biết quy tắc mở cửa trên, đã nhấn ngẫu nhiên liên tiếp 3 nút khác nhau trên bảng điều khiển. Tính xác suất để B mở được cửa phòng học đó.

Câu VII (*1,0 điểm*). Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AC, đường thẳng $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 45^o. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và chứng minh $A'B$ vuông góc với $B'C$.

Câu VIII (*1,0 điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng BC, BD và P là giao điểm của hai đường thẳng MN, AC. Biết đường thẳng AC có phương trình $x - y - 1 = 0$, $M(0;4)$, $N(2;2)$ và hoành độ điểm A nhỏ hơn 2. Tìm tọa độ các điểm P, A và B.

Câu IX (*1,0 điểm*). Giải phương trình

$$3\log_3^2\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right) + 2\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right).\log_3\left(9x^2\right) + \left(1 - \log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 = 0.$$

Câu X (*1,0 điểm*). Xét các số thực x, y thỏa mãn $x + y + 1 = 2\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}\right)$ (*).

1. Tìm giá trị lớn nhất của $x + y$.
2. Tìm m để $3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3\left(x^2 + y^2\right) \le m$ đúng với mọi x, y thỏa mãn (*).

----------**Hết**----------

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

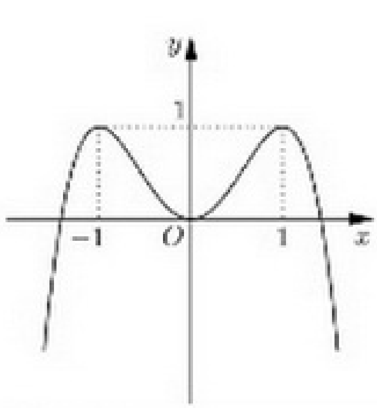
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA NĂM 2016

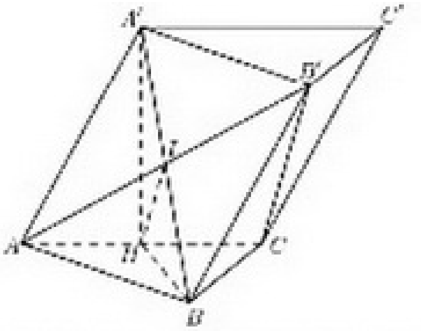
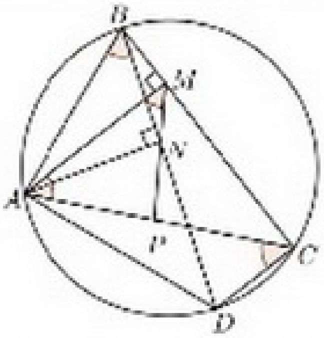
ĐÁP ÁN - THANG ĐIỂM

Môn thi: TOÁN

(*Đáp án - Thang điểm có 04 trang*)

Câu	Đáp án	Điểm
I ***(1,0 điểm)***	**1. *(0,5 điểm)***	
	Ta có $w = 2(1+2i) + 1 - 2i$	0,25
	$= 3 + 2i.$ Vậy phần thực của w là 3 và phần ảo của w là 2.	0,25
	2. *(0,5 điểm)*	
	Ta có $A = 2\log_2 x - 3\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x$	0,25
	$= -\frac{1}{2}\log_2 x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$	0,25
II ***(1,0 điểm)***	• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. • Sự biến thiên: - Chiều biến thiên: $y' = -4x^3 + 4x$;	0,25
	$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$; $y' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$; $y' < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ x > 1. \end{array}\right.$ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.	0,25
	- Cực trị: hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 1$, $y_{CĐ} = 1$; đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = 0$. - Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$. - Bảng biến thiên: $\begin{array}{c\|ccccccccc} x & -\infty & & -1 & & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline y & -\infty & \nearrow & 1 & \searrow & 0 & \nearrow & 1 & \searrow & -\infty \end{array}$	0,25
	• Đồ thị: 	0,25
III ***(1,0 điểm)***	Hàm số đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + m$.	0,25
	Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $3x^2 - 6x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 3$.	0,25

	Ta có $x_1^2+x_2^2=3 \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=3 \Leftrightarrow 4-2.\dfrac{m}{3}=3$	0,25
	$\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn). Vậy $m=\dfrac{3}{2}$.	0,25
IV *(1,0 điểm)*	Ta có $I=\int\limits_0^3 3x^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^3 3x\sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x$.	0,25
	• $I_1=\int\limits_0^3 3x^2\,\mathrm{d}x=x^3\Big\vert_0^3=27$.	0,25
	• $I_2=\int\limits_0^3 3x\sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x$. Đặt $t=x^2+16$, ta có $t'=2x;\ t(0)=16,\ t(3)=25$. Do đó $I_2=\int\limits_{16}^{25}\dfrac{3}{2}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$	0,25
	$=t\sqrt{t}\Big\vert_{16}^{25}=61$. Vậy $I=I_1+I_2=88$.	0,25
V *(1,0 điểm)*	Ta có $\overrightarrow{BC}=\left(1;-1;2\right)$.	0,25
	Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với BC có phương trình là $x-y+2z+3=0$.	0,25
	Đường thẳng BC có phương trình là $\begin{cases}x=1+t\\ y=-t\\ z=1+2t.\end{cases}$	0,25
	Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Ta có $H=(P)\cap BC$. - Vì $H\in BC$ nên $H\left(1+t;-t;1+2t\right)$. - Vì $H\in(P)$ nên $\left(1+t\right)-\left(-t\right)+2\left(1+2t\right)+3=0 \Leftrightarrow t=-1$. Vậy $H\left(0;1;-1\right)$.	0,25
VI *(1,0 điểm)*	**1. *(0,5 điểm)***	
	Ta có $2\sin^2x+7\sin x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-4\\ \sin x=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$	0,25
	• $\sin x=-4$: vô nghiệm. • $\sin x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.	0,25
	2. *(0,5 điểm)*	
	Không gian mẫu Ω có số phần tử là $n(\Omega)=\mathrm{A}_{10}^3=720$.	0,25
	Gọi E là biến cố: "B mở được cửa phòng học". Ta có $E=\left\{(0;1;9),(0;2;8),(0;3;7),(0;4;6),(1;2;7),(1;3;6),(1;4;5),(2;3;5)\right\}$. Do đó $n(E)=8$. Vậy $\mathrm{P}(E)=\dfrac{n(E)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{90}$.	0,25

VII **(1,0 điểm)**	 Gọi H là trung điểm của AC, ta có $A'H \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{A'BH} = 45^\circ$.	0,25
	Ta có $BH = \frac{1}{2}AC = a$ và $S_{\Delta ABC} = a^2$. Tam giác $A'HB$ vuông cân tại H, suy ra $A'H = BH = a$. Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} = a^3$.	0,25
	Gọi I là giao điểm của $A'B$ và AB', ta có I là trung điểm của $A'B$ và AB'. Suy ra $HI \perp A'B$.	0,25
	Mặt khác HI là đường trung bình của $\Delta AB'C$ nên $HI \parallel B'C$. Do đó $A'B \perp B'C$.	0,25
VIII **(1,0 điểm)**	 Phương trình MN: $x + y - 4 = 0$. Tọa độ P là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.	0,25
	Vì AM song song với DC và các điểm A, B, M, N cùng thuộc một đường tròn nên ta có $\widehat{PAM} = \widehat{PCD} = \widehat{ABD} = \widehat{AMP}$. Suy ra $PA = PM$.	0,25
	Vì $A \in AC : x - y - 1 = 0$ nên $A(a; a-1), a < 2$. Ta có $\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 5 \end{array}\right. \Rightarrow A(0;-1)$.	0,25
	Đường thẳng BD đi qua N và vuông góc với AN nên có phương trình là $2x + 3y - 10 = 0$. Đường thẳng BC đi qua M và vuông góc với AM nên có phương trình là $y - 4 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + 3y - 10 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-1;4)$.	0,25
IX **(1,0 điểm)**	Điều kiện: $0 < x \le 2$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với $3\log_3^2\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right) - 4\log_3\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right).\log_3(3x) + \log_3^2(3x) = 0$ $\Leftrightarrow \left[\log_3\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right) - \log_3(3x)\right]\left[3\log_3\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right) - \log_3(3x)\right] = 0$.	0,25
	• $\log_3\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right) - \log_3(3x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} = 3x$ $\Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{4 - x^2} = 9x^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{4 - x^2} = 9x^2 - 4$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \ge \frac{4}{9} \\ 81x^4 - 68x^2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x^2 = \frac{68}{81}$. Kết hợp với điều kiện $0 < x \le 2$, ta có nghiệm $x = \frac{2\sqrt{17}}{9}$.	0,25
	• $3\log_3\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right) - \log_3(3x) = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right)^3 = 3x$ (1). Vì $0 < x \le 2$ nên $3x \le 6$.	0,25

Mặt khác $\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)^2=4+2\sqrt{4-x^2}\geq 4\Rightarrow\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)^3\geq 8$. Do đó phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{2\sqrt{17}}{9}$.

0,25

X
(1,0 điểm)

1. *(0,25 điểm)*

Điều kiện: $x\geq 2, y\geq -3$.

Ta có (*) $\Leftrightarrow (x+y+1)^2=4\left(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\right)$ (**).

Vì $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\leq x+y+1$ nên từ (**) suy ra $(x+y+1)^2\leq 8(x+y+1)$

$\Rightarrow x+y+1\leq 8\ \Rightarrow x+y\leq 7$.

Ta có $x=6, y=1$ thỏa mãn (*) và $x+y=7$. Do đó giá trị lớn nhất của biểu thức $x+y$ bằng 7.

0,25

2. *(0,75 điểm)*

Vì $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\geq 0$ nên từ (**) suy ra $(x+y+1)^2\geq 4(x+y+1)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y+1\leq 0\\x+y+1\geq 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y+1=0\ (\text{vì } x+y+1\geq 0)\\x+y+1\geq 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=-1\\x+y\geq 3.\end{array}\right.$$

0,25

Vì $x^2\geq 2x$ (do $x\geq 2$), $y^2+1\geq 2y$ nên $x^2+y^2+1\geq 2(x+y)$. Do đó

$$3^{x+y-4}+(x+y+1)2^{7-x-y}-3\left(x^2+y^2\right)\leq 3^{x+y-4}+(x+y+1)2^{7-x-y}-6(x+y)+3.$$

0,25

Đặt $t=x+y$, ta có $t=-1$ hoặc $3\leq t\leq 7$.

Xét hàm số $f(t)=3^{t-4}+(t+1)2^{7-t}-6t+3$. Ta có $f(-1)=\dfrac{2188}{243}$;

$f'(t)=3^{t-4}\ln 3+2^{7-t}-(t+1)2^{7-t}\ln 2-6$;

$f''(t)=3^{t-4}\ln^2 3+\left[(t+1)\ln 2-2\right]2^{7-t}\ln 2>0, \forall t\in[3;7]$.

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(3;7)$. Mà $f'(t)$ liên tục trên $[3;7]$ và $f'(3)f'(7)<0$, do đó $f'(t)=0$ có nghiệm duy nhất $t_0\in(3;7)$.

Bảng biến thiên

t	3		t_0		7
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\dfrac{148}{3}$	$\searrow$	$f(t_0)$	$\nearrow$	-4

Suy ra $3^{x+y-4}+(x+y+1)2^{7-x-y}-3\left(x^2+y^2\right)\leq\dfrac{148}{3}$ với mọi x,y thỏa mãn (*).

Đẳng thức xảy ra khi $x=2, y=1$.

Vậy $m\geq\dfrac{148}{3}$.

0,25

--------- Hết ---------